Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de Admisión a la Maestría
3 de noviembre de 2023
(3 horas)

Resuelva correctamente al menos 3 problemas completos de cada tema.

Justifique todas sus respuestas.

I. Algebra Lineal

1. Encuentre una base y la dimensión del espacio vectorial de polinomios en la matriz A, sobre $\mathbb{R}$, donde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}.$$
Por ejemplo, $A^3 - A^2 + 5A + I$ es uno de tales polinomios.

2. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz tal que $AA^t = I$ y $\det(A) < 0$. Calcule $\det(A+I)$.

3. Encuentre una matriz 3×3, A, tal que
$$Au_1 = u_1, \quad Au_2 = 2u_2, \quad Au_3 = 3u_3$$
donde
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
.

4. Sea $P_4[x]$ el espacio de los polinomios en x, de grado menor o igual a 4 con coeficientes en $\mathbb{R}$, equipado con el producto interno
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$
Sea W el subespacio de $P_4[x]$ que consiste de todos los polinomios constantes, esto es, $W = \mathbb{R}$. Encuentre una base para $W^\perp$.

5. Sean $A, B : V \to V$ transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimensión finita. Muestre que si $AB = I$ entonces $BA = I$. ¿Será cierto esto para un espacio vectorial de dimensión infinita? Demostrar en caso afirmativo o dar un contraejemplo.

II. Cálculo

6. Determine si la serie $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\dots$ es convergente y si este es el caso, calcule su suma.

7. Sea $H(x)$ la función dada por: $H(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Pruebe (¡sin usar calculadora!) que $H(4)-H(2)<\frac{2}{5}$.

8. Considere la sucesión $a_n=\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.

   (a). Pruebe que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

   (b). Evalue la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

9. Encuentre el punto de la parábola $y^2=16x$ cuya distancia a la recta $4x-3y+24=0$ sea mínima.

10. Diga si los siguientes límites existen y argumente su respuesta:

    (a). $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}$ (b). $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{xy}$.